**Григорьев Я. Ю., Григорьева А. Л., Канашин И. В.**
**Ya. Yu. Grigoriev, A. L. Grigorieva, I. V. Kanashin**

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ О ВДАВЛИВАНИИ КЛИНА В ВЫПУКЛУЮ ЗАГОТОВКУ

# MATHEMATICAL MODEL OF THE PROBLEM OF PRESSING A WEDGE INTO A CONVEX WORKPIECE

**Григорьев Ян Юрьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, и. о. проректора по учебной работе Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: jan198282@mail.ru.
**Yan Yu. Grigoriev** – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Vice-Rector for Academic Affairs of Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: jan198282@mail.ru.

**Григорьева Анна Леонидовна** – кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой «Прикладная математика» Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: naj198282@mail.ru.
**Anna L. Grigorieva** – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Applied Mathematics Department, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: naj198282@mail.ru.

**Канашин Илья Валерьевич** – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного университета (Россия, Комсомольск-на-Амуре). E-mail: jan198282@mail.ru.
**Ilya V. Kanashin** – a Postgraduate Student, Komsomolsk-na-Amure State University (Russia, Komsomolsk-on-Amur). E-mail: jan198282@mail.ru.

**Аннотация.** В данной работе рассматривается задача о внедрении плоского клина в выпуклую заготовку криволинейной формы. В ходе решения задачи, поставленной авторами работы, определяется система уравнений для нахождения угла раскрытия центрированного веера в жесткопластической области и координат точек, лежащих на пересечении клина и деформированной поверхности, а также деформированной и недеформированной поверхностей. Также в работе выводится система дифференциальных уравнений, позволяющая найти функцию, описывающую форму деформированной поверхности выдавленного материала, с помощью которой можно точно определить геометрическую границу области. Далее авторами с помощью полученных выше систем дифференциальных уравнений и функции, характеризующей геометрию изменения деформируемой границы выпуклой формы, описывается алгоритм нахождения нагрузки, необходимой для внедрения клина в выпуклую заготовку. При этом клин может изготавливаться из различных материалов в зависимости от постановки задачи и требуемого практического применения. Также в работе предлагается аналитическое решение системы дифференциальных уравнений для определения времени, затрачиваемого на внедрение клина до момента обращения угла раскрытия веера характеристик в нуль. В статье решается типовая задача (о внедрении клина в гиперболический цилиндр), с помощью которой демонстрируется аналитическое решение определения нагрузки и уравнения для деформируемой границы заготовки в области внедрения клина. В работе показывается, что, зная уравнения движения выпираемой границы тела и используя определённое напряжённо-деформируемое состояние в области деформирования, можно определить площадь области, которая будет подлежать выпячиванию.

**Summary.** In this paper, the problem of embedding a flat wedge into a convex workpiece of a curved shape is considered. In the course of solving the problem posed by the authors of the work, a system of equations is determined to find the opening angle of a centered fan in a rigid plastic region and the coordinates of points lying at the intersection of the wedge and the deformed surface, as well as deformed and undeformed surfaces. Also in the work, a system of differential equations is derived, which allows us to find a function describing the shape of the deformed surface of the extruded material, with which it is possible to accurately determine the geometric boundary of the region. Further, the authors, using the systems of differential equations obtained above and a function characterizing the geometry of the change in the deformable boundary of a convex shape, describe an algorithm for finding the load necessary for embedding a wedge into a convex workpiece. In this case, the wedge can be made of various materials, depending on the task statement and the required practical application. The paper also proposes an ana-

lytical solution to a system of differential equations to determine the time spent on the introduction of a wedge, until the angle of opening of the fan of characteristics turns to zero. The article solves a typical problem (about embedding a wedge into a hyperbolic cylinder), which demonstrates an analytical solution for determining the load and the equation for the deformable boundary of the workpiece in the area of wedge embedding. The paper shows that, knowing the equations of motion of the bulging boundary of the body and using a certain stress-strain state in the deformation region, it is possible to determine the area that will be subject to bulging.

**Ключевые слова:** жесткопластическое тело, плоский клин, плоская деформация, выпуклая заготовка, вдавливание, гиперболический цилиндр.

**Key words:** rigid-plastic body, flat wedge, plane deformation, convex workpiece, indentation, hyperbolic cylinder.

УДК 531

**Введение.** Клин с углом раствора $2\theta$ внедряется в выпуклую заготовку криволинейной формы. В результате внедрения часть материала выдавливается и форма заготовки изменяется. Поле линий скольжения состоит из трёх областей (см. рис. 1). Две из них – $ABD$ и $AEC$ – имеют треугольную форму, оба семейства линий скольжения в них прямолинейны; третья область – центрированный веер $ADE$.

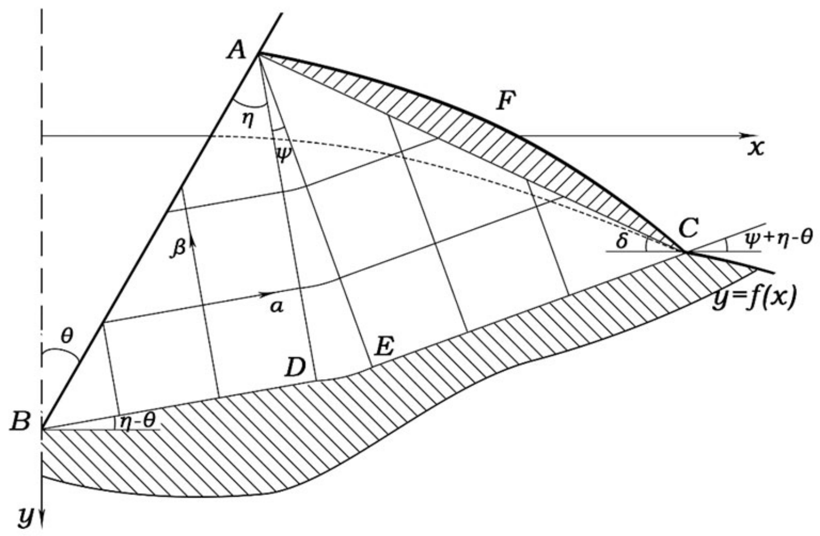


Рис. 1. Поле линий скольжения при вдавливании клина с углом раствора $2\theta$ в выпуклую заготовку

Скорость внедрения клина $V_y$ постоянна и полагается равной $-1$, т. к. ось $y$ направлена вверх, коэффициент трения $\mu$ постоянен вдоль поверхности контакта клина с заготовкой. Его значение связано с углом $\eta$ зависимостью [1]

$$\mu = \frac{\cos 2\eta}{1 + \sin 2\eta}.$$

Решение задачи состоит в определении в каждый момент времени $t$ формы деформированной границы материала $AFC$, координат точек $A$ и $C$, угла раскрытия веера $\psi(t)$. Известные значения перечисленных параметров позволяют найти необходимую для внедрения клина нагрузку.

**Алгоритм решения задачи.** В каждый момент времени поле скоростей определяется проекциями скорости $V_y$ на $\alpha$- и $\beta$-линии, которые равны [2-4]

$$v_\alpha = -V_y \frac{\sin\theta}{\cos\eta}, \qquad v_\beta = 0.$$

Из полученного поля скоростей следует, что движение материала в области $BAFC$ происходит по направлению α-линий, при этом области $ABD$ и $AECF$ движутся как жёсткое целое, а угол раствора веера в силу выпуклости заготовки монотонно уменьшается. Из этого следует, что весь процесс деформирования можно разбить на два этапа: первый происходит при $\psi > 0$, деформированная поверхность в процессе пластического течения образуется в точке $C$, а в точке $A$ она подминается клином; второй начинается в момент времени $t^*$ при обращении угла ψ в нуль, деформированная поверхность также образуется в точке $C$, но в точке $A$ она уже не подминается клином и, соответственно, не оказывает влияния на пластическое течение.

На первом этапе материал в области $AECF$ движется как жёсткое целое, проекции скорости точек области на оси координат $x$ и $y$ равны [5]

$$v_x = v_\alpha \cos(\eta - \theta + \psi), \qquad v_y = v_\alpha \sin(\eta - \theta + \psi). \tag{1}$$

Интегрирование соотношений (1) даёт уравнения свободной границы деформированной поверхности $AFC$ в виде

$$x(t,\tau) = v_\alpha \int_\tau^t \cos(\eta - \theta + \psi)\, dt + x_0(\tau),$$

$$y(t,\tau) = v_\alpha \int_\tau^t \sin(\eta - \theta + \psi)\, dt + y_0(\tau),$$

где $x = x_0(\tau)$, $y = y_0(\tau)$ – параметрическое представление границы тела до деформации; $x = x(t,\tau)$, $y = y(t,\tau)$ – параметрические уравнения деформированной части свободной поверхности $AFC$ в момент времени $t$. Параметр τ выбран так [6], что он совпадает со временем перехода соответствующей точки с недеформированной границы на свободную поверхность выдавливаемого объёма, т. е.

$$x_0(\tau) = x_C(\tau), \qquad y_0(\tau) = y_C(\tau).$$

В силу ортогональности треугольников $ABD$ и $AEC$, а также равенства линий $AD$ и $AE$ между собой справедливо соотношение

$$|AC| = \sqrt{2}|AB|\cos\eta.$$

Координаты точек $A$ и $C$ находятся как проекции прямой $AB$ и ломаной линии $BAC$ на оси $x$ и $y$:

$$x_A = |AB|\sin\theta,$$

$$y_A = V_y t + |AB|\cos\theta,$$

$$x_C = |AB|\sin\theta + |AC|\cos\delta,$$

$$y_C = V_y t + |AB|\cos\theta - |AC|\sin\delta,$$

где $\delta = \frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi$. Из полученных равенств можно вывести соотношение между координатами точки $C$:

$$\frac{x_C}{1 + \omega\cos\delta} = \frac{(y_C + t)\mathrm{tg}\theta}{1 - \omega\mathrm{tg}\theta\sin\delta}, \tag{2}$$

где $\omega = \frac{\sqrt{2}}{v_\alpha} = \sqrt{2}\frac{\sin\theta}{\cos\eta}$.

Так как точка $C$ лежит на недеформированной поверхности, при форме заготовки $y = f(x)$ справедливо равенство

$$y_C(t) = f\big(x_C(t)\big). \tag{3}$$

Точка $A$ лежит на пересечении деформированной поверхности и клина, поэтому [7–10]

$$x_A = \frac{x_C}{1 + \omega\cos\delta} = \upsilon_\alpha \int_{\tau_A}^{t} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) dt + x_C(\tau_A),$$
$$y_A = \frac{y_C + t\omega\mathrm{tg}\theta\sin\delta}{1 - \omega\mathrm{tg}\theta\sin\delta} = \upsilon_\alpha \int_{\tau_A}^{t} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) dt + y_C(\tau_A), \tag{4}$$

где $\tau_A$ – время начала движения материальной точки, имеющей в момент времени $t$ координаты $x_A(t), y_A(t)$.

Соотношения (2) – (4) представляют собой систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными функциями: $x_C(t)$, $y_C(t)$, $\delta(t)$, $\tau_A(t)$.

Дифференцированием по $t$ эта система может быть приведена к системе дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом:

$$y'_C(t) - f'(x_C)x'_C = 0,$$

$$x'_C z_1 - y'_C z_2 - \omega\psi'[x_C\sin\delta\, z_1{}^2 - (y_C + t)\cos\delta\, z_2{}^2] = z_2,$$

$$x'_C z_1 - \psi' x_C z_1{}^2\omega\sin\delta + \tau'_A[\upsilon_\alpha\cos(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - x'_C(\tau_A)] =$$

$$= \upsilon_\alpha\cos(\eta - \theta + \psi), \tag{5}$$

$$y'_C\frac{z_2}{\mathrm{tg}\theta} - \omega\cos\delta\frac{z_2}{\mathrm{tg}\theta}\psi'[t\mathrm{tg}\theta + z_2(y_C + t\omega\mathrm{tg}\theta\sin\delta)] +$$

$$+\tau'_A[\upsilon_\alpha\sin(\eta - \theta + \psi(\tau_A)) - y'_C(\tau_A)] = \upsilon_\alpha\sin(\eta - \theta + \psi) - \omega\sin\delta\, z_2,$$

где $z_1 = \frac{1}{1+\omega\cos\delta}$, $z_2 = \frac{\mathrm{tg}\theta}{1-\omega\mathrm{tg}\theta\sin\delta}$.

В момент начала процесса деформирования

$$t = 0, x_C = 0, y_C = 0, \tau_A = 0, \delta_0 = \frac{\pi}{4} - \eta + \theta - \psi(0),$$
$$z_{10} = \frac{1}{1 + \omega\cos\delta_0}, z_{20} = \frac{\mathrm{tg}\theta}{1 - \omega\mathrm{tg}\theta\sin\delta_0}$$

и система (5) примет вид

$$y'_C - f'(0)x'_C = 0,$$

$$x'_C z_{10} - y'_C z_{20} = z_{20},$$

$$x'_C + \frac{\tau'_A}{z_{10}}\left[\upsilon_\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right) - x'_C\right] = \frac{\upsilon_\alpha}{z_{10}}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right),$$

$$y'_C + \frac{\tau'_A\mathrm{tg}\theta}{z_{20}}\left[\upsilon_\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right) - y'_C\right] = \frac{\upsilon_\alpha\mathrm{tg}\theta}{z_{20}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right) - \omega\mathrm{tg}\theta\sin\delta_0.$$

Это система четырёх уравнений с тремя неизвестными – $x'_C$, $y'_C$, $\tau'_A$. Условие совместности этой системы

$$f'(0) = \frac{z_{10}\left[\left(\upsilon_\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)z_{10} - z_{20}\right)(z_{20} - \mathrm{tg}\theta) - z_{20}\upsilon_\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right)\mathrm{tg}\theta(z_{10} - 1)\right]}{z_{20}\left[\upsilon_\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)(z_{20} - \mathrm{tg}\theta)z_{10} + z_{20}\mathrm{tg}\theta\left(1 - z_{10}\left(\upsilon_\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right) + 1\right) + \upsilon_\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4} - \delta_0\right)\right)\right]}$$

определяет начальное значение функции $\delta(t)$. При $f'_x(0) = 0$ это условие совпадает с уравнением, связывающим углы раствора клина $\theta$ и раскрытия веера $\psi$ в задаче о внедрении клина в полупространство:

$$\cos(2\theta - \psi_0) = \frac{\cos\psi_0}{1 + \sin\psi_0}.$$

Форма деформированной границы на этом этапе определяется функцией, являющейся решением системы (5) и имеющей вид

$$y = F(x).$$

Поскольку область $AECF$ движется как жёсткое целое, поле напряжений в этой области в рамках теории идеального жесткопластического тела не определено. Приведённое на рис. 1 поле прямолинейных характеристик определяет напряжённое состояние, которое может рассматриваться как возможное, статически допустимое продолжение поля напряжений в эту область. Оно имеет вид

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = -2k.$$

Прямая линия $AC$ является линией разрыва напряжений, на ней выполняется условие

$$n_j\sigma_{ij} = 0,$$

а в области $AFC$

$$\sigma_{ij} = 0,$$

поэтому граничные условия на деформированной свободной поверхности выполняются [11].

Усилие, необходимое для внедрения клина, рассчитывается по формуле

$$p = 4k(1 + \psi)|AB| \sin\theta.$$

Схема пластического течения на втором этапе деформирования представлена на рис. 2.

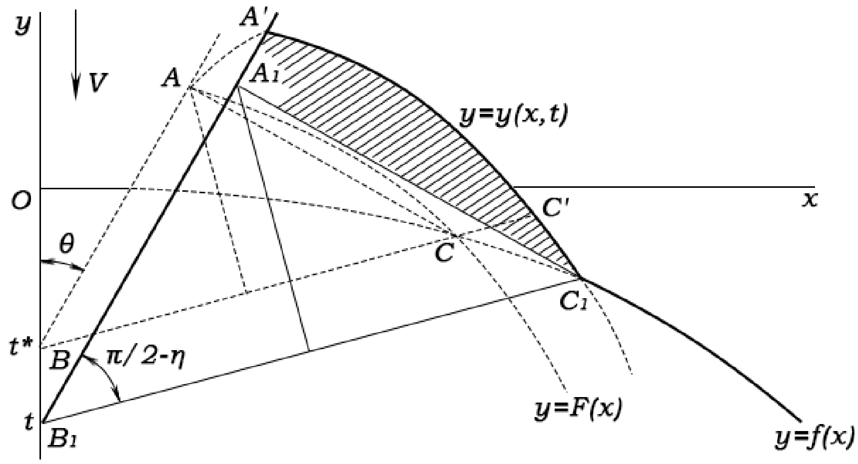


Рис. 2. Схема пластического течения при $\psi = 0$

Все точки области $A'C'C_1B_1A_1$ в каждый момент времени $t$ ($t \geq t^*$) движутся с одной и той же скоростью $\upsilon$, проекции которой на оси координат равны

$$\upsilon_x = \upsilon_\alpha \cos(\eta - \theta), \upsilon_y = \upsilon_\alpha \sin(\eta - \theta).$$

Уравнение подвижной границы $A'C'C_1$ определяется функцией $y = F(x)$, которая является решением системы (5) и имеет вид

$$y(x,t) = F(x - \upsilon_\alpha(t - t^*)\cos(\eta - \theta)) + \upsilon_\alpha(t - t^*)\sin(\eta - \theta).$$

На рис. 3 представлено пластическое течение в окрестности точки $C$. В результате вдавливания клина точка $C$, в момент времени $t$ находившаяся на недеформированной поверхности, при $t + \Delta t$ займёт положение $C'$, а дуга $CC_1$ перейдёт в дугу $C'C_1$. В силу равномерного движения области $A'C'C_1B_1A_1$ по направлению α-линии

$$CC' = v_\alpha \Delta t.$$

Если рассматривать $\Delta t$ как бесконечно малый промежуток времени, то дуги $CC_1$ и $C'C_1$ можно считать прямолинейными [12–13].

На рис. 3 выполнены дополнительные построения: отрезки $CH$ и $C'E$ построены параллельно оси $y$, а отрезки $C_1F$ и $CG$ параллельны оси $x$. Из треугольников $CC'G$, $FHC_1$, $CFC_1$ следует:

$$|C_1E| = |CC_1|\cos\phi - |CC'|\cos(\eta - \theta),$$

$$|C'E| = |CC_1|\sin\phi + |CC'|\sin(\eta - \theta),$$

$$|CC_1| = \frac{\Delta t}{\sin\phi + \cos\phi\,\mathrm{tg}(\eta - \theta)}.$$

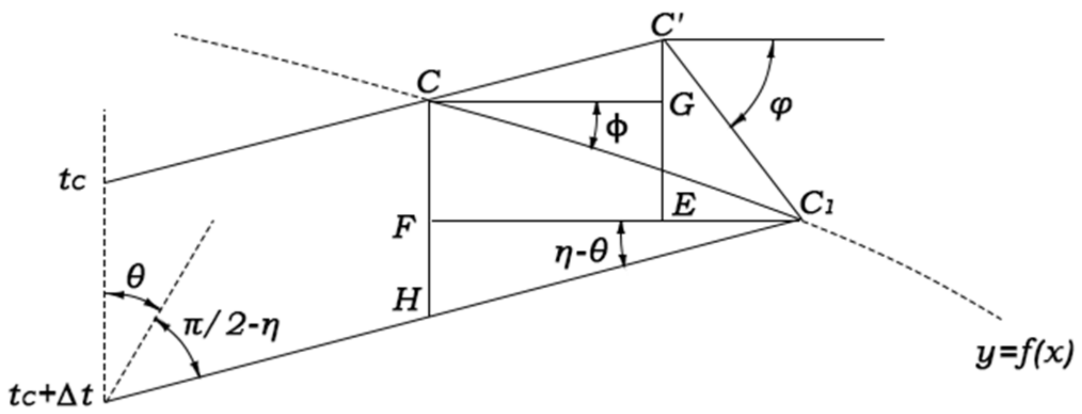


Рис. 3. Пластическое течение в окрестности точки $C$

В силу того, что $v_\alpha \Delta t = \mathrm{tg}\,\varphi$,

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1 + v_\alpha \sin(\eta - \theta)\,[1 + \mathrm{tg}(\eta - \theta)\mathrm{ctg}\phi]}{\mathrm{ctg}\phi - v_\alpha\cos(\eta - \theta) - v_\alpha \sin(\eta - \theta)\,\mathrm{ctg}\phi}. \quad (6)$$

При $\Delta t \to 0$ хорда $CC_1$ станет касательной к недеформированной поверхности $y = f(x)$ в точке $C$, а хорда $C'C_1$ – касательной к деформированной поверхности $y = y(x,t)$ в той же точке $C$, поэтому

$$\mathrm{tg}\,\phi = -f'(x_C), \quad (7)$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(x,t)=(x_C,t_C)} = -F'(x_C), \quad (8)$$

где $t_C$ – время начала движения точки $C$.

Положение точки $C$ определяется пересечением недеформированной поверхности $y = f(x)$ с линией

$$y = x\,\mathrm{tg}(\eta - \theta) + V_y t_C,$$

откуда следует равенство

$$x_C\,\mathrm{tg}(\eta - \theta) - t_C = f(x_C). \quad (9)$$

Введение новой переменной

$$\tilde{x} = x_C - \upsilon_\alpha (t - t_C)\cos(\eta - \theta) \quad (10)$$

и подстановка (7) и (8) в (6) приводят к уравнению

$$F'(\tilde{x}) = \frac{f'^{(x_C)} - \upsilon_\alpha \sin(\eta - \theta)\left[\mathrm{tg}(\eta - \theta) - f'^{(x_C)}\right]}{\upsilon_\alpha \sin(\eta - \theta) - \upsilon_\alpha \cos(\eta - \theta)\, f'^{(x_C)} - 1}. \quad (11)$$

Система уравнений (9) – (11) при условии $F(x_C) = y_C$ определяет ниже точки $C$ некоторую проходящую через эту точку кривую $y = F(x)$, которая, перемещаясь вдоль линии скольжения со скоростью $\upsilon_\alpha$, образует деформированную границу на втором этапе деформирования. Выполненная замена переменных эквивалентна обратному перемещению деформированной границы из положения $A'C'$, которое она занимала в момент времени $t$ (см. рис. 2) в положение $AC$, занимаемое ею в момент времени $t^*$.

При $\psi = 0$ процесс деформирования происходит только вдоль линии разрыва скоростей $B_1C_1$ и вся область $B_1A_1A'C_1$ движется как жёсткое целое [14–15]. В качестве возможного статически допустимого продолжения поля напряжений в эту область можно рассматривать однородное напряжённое состояние

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = -2k.$$

Так как материал в области $A_1A'C'C_1$ свободен от напряжений и не оказывает давления на клин, то при расчёте усилия, необходимого для внедрения клина, учитывается только часть площади контакта $B_1A_1$:

$$p = 4k|A_1B_1|\sin\theta,$$

Рассмотренное решение задачи о внедрении клина в выпуклую заготовку имеет место при условии

$$\eta \geq \theta$$

и будет полным, если существует статически допустимое продолжение поля напряжений ниже линии $BDEC$.

Пусть абсолютно твёрдый клин $y = |x|\mathrm{ctg}(\theta)$ внедряется в заготовку, имеющую форму гиперболического цилиндра $\frac{(y-a)^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. Для данной задачи возможны три варианта пластического течения.

В случае отсутствия трения в течение всего процесса деформирования угол раскрытия веера $\psi(t)$ будет сохранять постоянное ненулевое значение. Вследствие наличия у гиперболы асимптот $y = \pm\frac{a}{b}x$ процесс будет стремиться к некоторому автомодельному режиму, соответствующему вдавливанию клина $y = |x|\mathrm{ctg}(\theta)$ в клин $y = \frac{a}{b}|x|$. Форма подвижной границы в этом случае находится из решения системы уравнений (5).

Второй случай имеет место, если выполняется условие

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \eta + \theta\right) \geq \frac{a}{b}.$$

В данном случае при малых глубинах внедрения клина течение происходит при ненулевом $\psi$. Форма подвижной границы определяется решением системы (5). При дальнейшем внедрении клина угол раскрытия веера обращается в нуль и процесс деформирования стремится к автомодельному режиму. Форма деформированной границы определяется из решения системы (9) – (11).

Третий случай имеет место при

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \eta + \theta\right) < \frac{a}{b}.$$

Тогда решение может быть построено только до момента, когда прямая линия $AC$ займёт положение касательной к гиперболе в точке $C$. Для данной схемы это предельное положение линии $AC$, позволяющее построить статически допустимое продолжение поля напряжений в жёсткую область.

Пусть гиперболический цилиндр задаётся уравнением

$$(y-1)^2 - \frac{x^2}{16} = 1,$$

угол раствора клина равен $\frac{\pi}{4}$, трение отсутствует, т. е. $\eta = \frac{\pi}{4}$.

Тогда уравнение (3) примет вид

$$y_C = 1 - \frac{1}{4}\sqrt{x_C{}^2 + 16}.$$

Уравнение (2) после исключения из него $y_C$ запишется в виде

$$x_C(t) = \frac{(t+1)\frac{z_1}{z_2} - \frac{1}{4}\sqrt{16\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + t^2 + 2t}}{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 - \frac{1}{16}}.$$

Форма деформированной границы материала определяется решением системы (5), которая для данной задачи примет вид

$$y'_C(t) = -\frac{x_C}{4\sqrt{x_C{}^2 + 16}}x'_C,$$

$$x'_C z_1 - y'_C z_2 = z_2,$$

$$x'_C z_1 + \tau'_A[\upsilon_\alpha \cos(\psi) - x'_C(\tau_A)] = \upsilon_\alpha \cos(\psi),$$

$$y'_C \frac{z_2}{\text{tg}\theta} + \tau'_A[\upsilon_\alpha \sin(\psi) - y'_C(\tau_A)] = \upsilon_\alpha \sin(\psi) - \omega \sin\delta\, z_2.$$

Геометрическое представление пластической области и деформированной поверхности материала дано на рис. 4 [16].

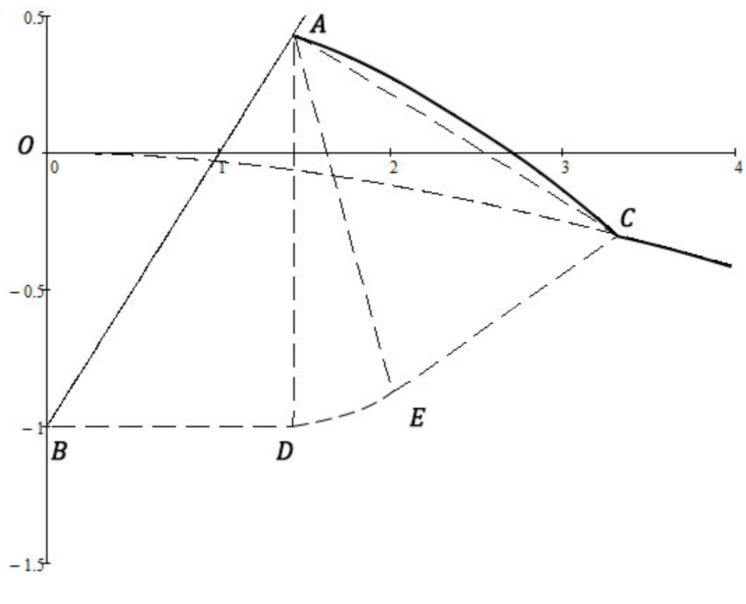


Рис. 4. Пластическая область и деформированная поверхность в задаче о внедрении клина $y = |x|\text{ctg}(\frac{\pi}{6})$ в гиперболический цилиндр $(y-1)^2 - \frac{x^2}{16} = 1$

В силу отсутствия трения решение задачи стремится к автомодельному режиму. Подобие формы деформированной поверхности для моментов времени $t = 1, t = 2, t = 3$ представлено на рис. 5.

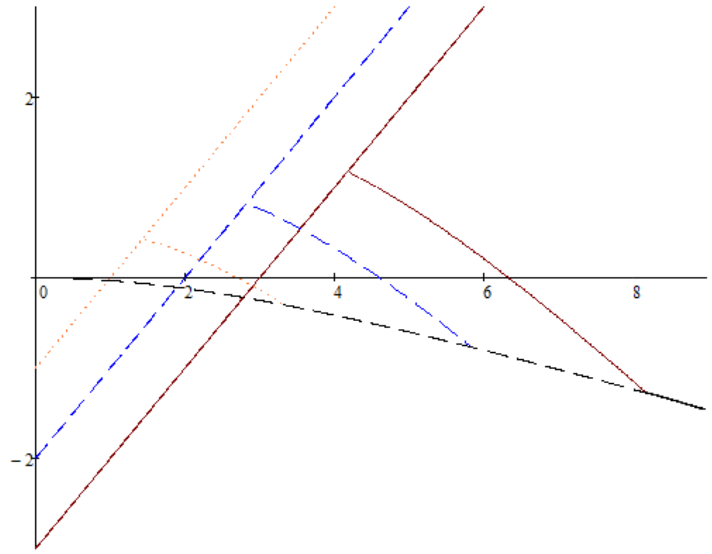


Рис. 5. Подобие формы деформированной поверхности в задаче о вдавливании клина $y = |x|\mathrm{ctg}(\frac{\pi}{6})$ в гиперболический цилиндр $(y-1)^2 - \frac{x^2}{16} = 1$ при отсутствии трения

**Выводы.** В данной работе для задачи о внедрении клина в выпуклую заготовку были выведены соотношения, позволяющие определить в каждый момент времени $t$: форму деформированной границы материала; координаты точек, лежащих на пересечении деформированной поверхности и клина, деформированной и недеформированной поверхностей; угол раскрытия веера $\psi(t)$ [17–18]. Получено соотношение для определения по найденным значениям перечисленных величин необходимой для внедрения клина нагрузки. Также было получено решение задачи о внедрении клина $y = |x|\mathrm{ctg}(\theta)$ в гиперболический цилиндр $\frac{(y-a)^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, вычисленное при отсутствии трения для значений $\theta = \frac{\pi}{4}, a = 1, b = 4$.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.
2. Хромов, А. И. Деформация и разрушение жесткопластических тел / А. И. Хромов. – Владивосток: Дальнаука, 1996. – 183 с.
3. Амосов, О. С. Создание интеллектуальной информационно-телекоммуникационной системы безопасности вуза нового поколения: о новом проекте Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета / О. С. Амосов, С. Г. Баена, Я. С. Иващенко // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2017. – № I-1 (29). – С. 119-120.
4. Амосов, О. С. Сетевая классификация атак в задачах информационной безопасности на основе интеллектуальных технологий, фрактального и вейвлет-анализа / О. С. Амосов, Д. С. Магола, С. Г. Баена // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2017. – № IV-1 (32). – С. 19-29.
5. Моделирование деформационных процессов элементов сложных конструкций в условиях малоцикловой деформации / А. Л. Григорьева, Я. Ю. Григорьев, А. И. Хромов, И. В. Канашин // Морские интеллектуальные технологии. – 2021. – Т. 2. – № 2 (52). – С. 123-128.

6. Хромов, А. И. Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформаций несжимаемого жёсткопластического тела / А. И. Хромов, Е. П. Кочеров, А. Л. Григорьева // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2006. – № 43. – С. 88-91.
7. Григорьева, А. Л. Алгоритм решения задачи о растяжении полосы с непрерывным полем скоростей перемещений с использованием деформационно-энергетического условия пластичности / А. Л. Григорьева, Я. Ю. Григорьев // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 1-3. – С. 694-700.
8. Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М.: Гостехиздат, 1956. – 407 с.
9. Разработка модели определения глубины пространства для задач детектирования препятствий беспилотного летательного аппарата / Р. И. Шишов, Я. Ю. Григорьев, А. Л. Григорьева, Е. П. Жарикова // Современные наукоёмкие технологии. – 2019. – № 11-2. – С. 306-313.
10. Детектирование состояния поверхности / Е. П. Жарикова, И. А. Трещев, Я. Ю. Григорьев, А. Л. Григорьева // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Науки о природе и технике. – 2019. – № III-1 (39). – С. 58-63.
11. Намоконов, А. Н. Разработка программного комплекса получения параметров, характеризующих поведение быстросхватывающися бетонов высокопрочных марок / А. Н. Намоконов, А. Л. Григорьева // Молодёжь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: материалы III Всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных. В 3 ч. Ч. 2 / редкол.: Э. А. Дмитриев (отв. ред.) [и др.]. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2020. – С. 330-333.
12. Атюков, Н. В. Математическое моделирование образа объекта с помощью лазерного дальномера / Н. В. Атюков, А. Л. Григорьева // Научно-техническое творчество аспирантов и студентов: материалы Всероссийской научно-технической конференции студентов и аспирантов, 9-20 апреля 2018 г., г. Комсомольск-на-Амуре. В 2 ч. Ч. 2. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2018. – С. 129-131.
13. Володченко, В. С. Поля деформаций тензора конечных деформаций в окрестности угловой точки штампа / В. С. Володченко, О. В. Козлова // Научно-техническое творчество аспирантов и студентов: материалы 47-й научно-технической конференции студентов и аспирантов / отв. ред. Э. А. Дмитриев. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВО «КнАГУ», 2017. – С. 230-232.
14. Bukhanko A. A., Kozlova O. V. Strain Field and Energy Dissipation at a Crack Tip under Axisymmetric Strain Conditions // Materials Physics and Mechanics. 2016. Vol. 28. № 1-2. P. 36-38.
15. Сухарев, А. Г. Методы оптимизации / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. – М.: Юрайт, 2014. – 368 с.
16. Голубева, Н. В. Математическое моделирование систем и процессов: учеб. пособие / Н. В. Голубева. – СПб.: Лань, 2013. – 192 с.
17. Тимченко, Т. Н. Системный анализ в управлении / Т. Н. Тимченко. – М.: РИОР, 2011. – 162 с.
18. Zemlyanova A. Y., White L. M. Axisymmetric frictionless indentation of a rigid stamp into a semi-space with a surface energetic boundary // Mathematics and Mechanics of Solids. 2021.